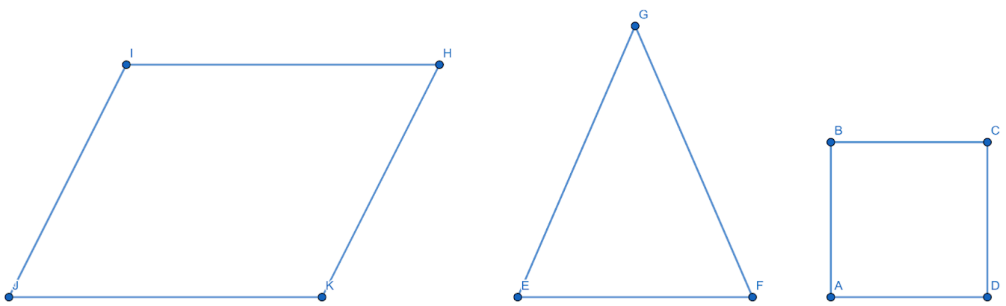
Risoluzione Problemi Campionato Tappa di Febbraio

Problema Febbraio (cat. 1-2 Media)

Testo:
Gigi, Dani e Simo stanno giocando con tre figure piane, e si divertono a interrogarsi a vicenda. Al chè Dani propone un quesito a Simo: “si considerino il quadrato ABCD, il triangolo EFG, il parallelogramma HIJK. La diagonale AC misura $7\sqrt{2}$, il segmento JK (base del parallelogramma) 14, l’altezza del parallelogramma rispetto a HI vale 12, e quella rispetto a KH 21. Sapendo che la base del triangolo ha la stessa misura del lato del quadrato e che la sua altezza misura come KH, quanto vale la sua area?”
Cosa deve rispondere Simo?



Svolgimento:
L’area del quadrato si può calcolare in due modi: $\frac{D \cdot D}{2}$ o $\ell \cdot \ell$, dunque in questo caso l’area misura 49, e il lato 7. L’area del parallelogramma vale: $b \cdot h$, quindi qui misura $14 \cdot 12$=168, e KH= 168:21=8. Dunque, EF=7 e GH=8, e la sua area vale: $\frac{7 \cdot 8}{2}$ = 28.

Problema Febbraio (cat. 3 media-1 Superiore)

Testo:
Al laboratorio di microbiologia di DiarikTown si sta studiando una specie del batterio Matebacillus Sapientissimus, che ha un modo di replicarsi esponenzialmente molto interessante. Gli scienziati hanno notato che partendo da una popolazione di *n* individui, con *n* scomponibile in almeno tre fattori primi, si ha una crescita “super esponenziale”. Ovvero, ogni tot di tempo intero (settimane o mesi) l’esponente di uno dei fattori primi di *n* aumenta, sicché per identiche variazioni di tempo si osservano identiche variazioni negli esponenti. Questo può avvenire anche per più fattori primi, così come per alcuni può non avvenire. Un mese è considerato essere

composto di 4 settimane e 2 giorni, e la crescita degli esponenti avviene, ad esempio, esattamente dopo un mese, o esattamente dopo una settimana, cioè passati 7 giorni completi. Considerando che il ceppo in osservazione dopo 3 settimane dall'inizio conta 4320 esemplari, e che dopo 4 mesi ne conta 5733089280, di quanti individui si componeva la popolazione all'inizio dell'osservazione?

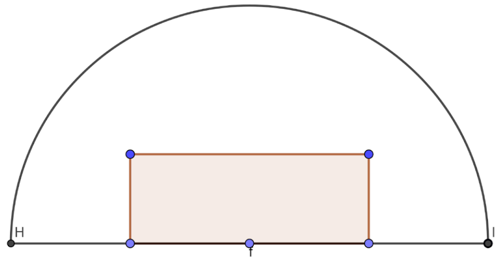
Svolgimento:

Il primo passaggio per risolvere questo problema è scomporre in fattori primi i due numeri, così da poterci riflettere. Dunque, $4320= 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$, e $5733089280= 2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5$. Come si può osservare, il fattore primo 5 è presente in entrambi gli sviluppi, quindi rimane costante nel tempo, e compare anche nel numero di partenza. Inoltre, gli esponenti del 3 e del 2 variano, ora bisogna capire con che ritmo. Se si osserva bene, l'esponente del 3 è variato di 4 unità, come i mesi che sono passati (attenzione: dopo 3 settimane non è passato un mese, e perciò non possiamo fare la differenza fra i due tempi poichè escluderemmo questo importantissimo dettaglio). Tra la prima e la seconda osservazione sono passate 17-3=14 settimane, proprio come la variazione nell'esponente del 2. Dunque, l'esponente del due varia di un'unità ogni settimana, e quello del tre di un'unità ogni mese. Andando a ritroso, si riscontra che all'inizio dell'osservazione il 3 aveva esponente 3, e il due aveva esponente 5-3=2. Dunque, il gruppo iniziale è composto da $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5=540$ individui.

Problema Febbraio (cat. 2-3 Superiore)

Testo:

Federico Casolari sta calciando dei rigori per allenarsi prima della finale dei play-off. Avendo lui fatto il liceo scientifico, e avendo lì vicino Gigi, gli viene in mente una sfida, allora si rivolge a Gigi e chiede: “Ehi Gigi, sapendo che la porta ha un'area di 18 metri quadri, e mi sto allenando a una distanza dalla porta di 11 metri dal suo centro, ma che con la potenza che imprimo alla palla, questa può finire con la stessa probabilità in un punto qualsiasi del semicerchio che si forma dal centro della porta con raggio 20 metri. Con che probabilità riuscirò a fare gol bendato, se in porta non c'è il portiere?” (trascurando lo spessore dei pali e della traversa e la rete ai lati della porta)
Esprimere la soluzione come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini, dopo averla moltiplicata per pigreco.



Svolgimento:
Per calcolare questa probabilità basta fare il rapporto tra l'area della porta e quella del semicerchio. Quindi il numeratore lo abbiamo già nei dati (18), mentre l'area della semicerchio sarà 200**π**. Siccome la risposta va moltiplicata per pigreco, i due pi si semplificano, mentre la frazione ridotta ai minimi termini sarà 9/100, la cui somma di numeratore e denominatore è 109. Non male per essere bendato!

Problema Febbraio(cat. 4-5 Superiore)

Testo:
Capitan Ricci ha deciso di donare la propria maglia autografata a Diariko per il progetto MathWest, ma decide di consegnargliela a patto che i ragazzi risolvano il quesito che gli sottopone: "L'ultima volta che ho giocato a MathWest avevano giocato meno di 300 giocatori, e li si poteva raggruppare per 4 facendone avanzare 3, oppure raggruppare per 5 facendone avanzare 4, oppure raggruppare per 7 facendone avanzare 5. Quanti giocatori avevano giocato?" Che numero devono rispondere i ragazzi per portarsi a casa la maglietta? (se ci sono più soluzioni possibili, fornire come risultato la somma di queste)

Svolgimento:
Per risolvere il quesito proposto dal Capitano bisogna applicare il teorema cinese del resto, facente parte dell'aritmetica modulare.

Abbiamo il seguente sistema di congruenze:

(α) $x \equiv 3 \pmod 4$
(β) $x \equiv 4 \pmod 5$
(γ) $x \equiv 5 \pmod 7$

con la condizione che $x<300$.

Quindi, dobbiamo ricavare l'equazione che esprime x in funzione delle sue congruenze. Dalla (α) ricaviamo che $X = 4a+3$. Inserendo nella (β) possiamo svilupparla ulteriormente: $4a+3 \equiv 4$ (5), $4a \equiv 1$, $a \equiv -1$, $a \equiv 4$ (5). Perciò $a=5b+4$. Dall'equazione precedente, risulta che: $X = 4(5b+4)+3=20b+19$. Inseriamo quanto ottenuto nella (γ): $20b+19 \equiv 5$ (7) Da cui $-b \equiv 0$, $b \equiv 0$. Perciò risulta $b \equiv 7c$. Tornando con quanto trovato nell'equazione ricaviamo $X = 20(7c)+19$ da cui $X = 140c+19$. 19 è il minimo valore per cui vale il sistema. Si può notare che 140 è il mcm di 4, 5 e 7. Infine, c rappresenta un qualsiasi valore intero positivo.

In questo caso, poichè $X<300$, valgono solo $c=0$, $c=1$ e $c=2$.

I tre numeri richiesti sono quindi 19, 159, 299, la cui somma è 477, soluzione del problema.